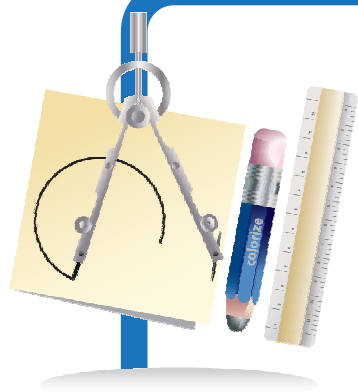
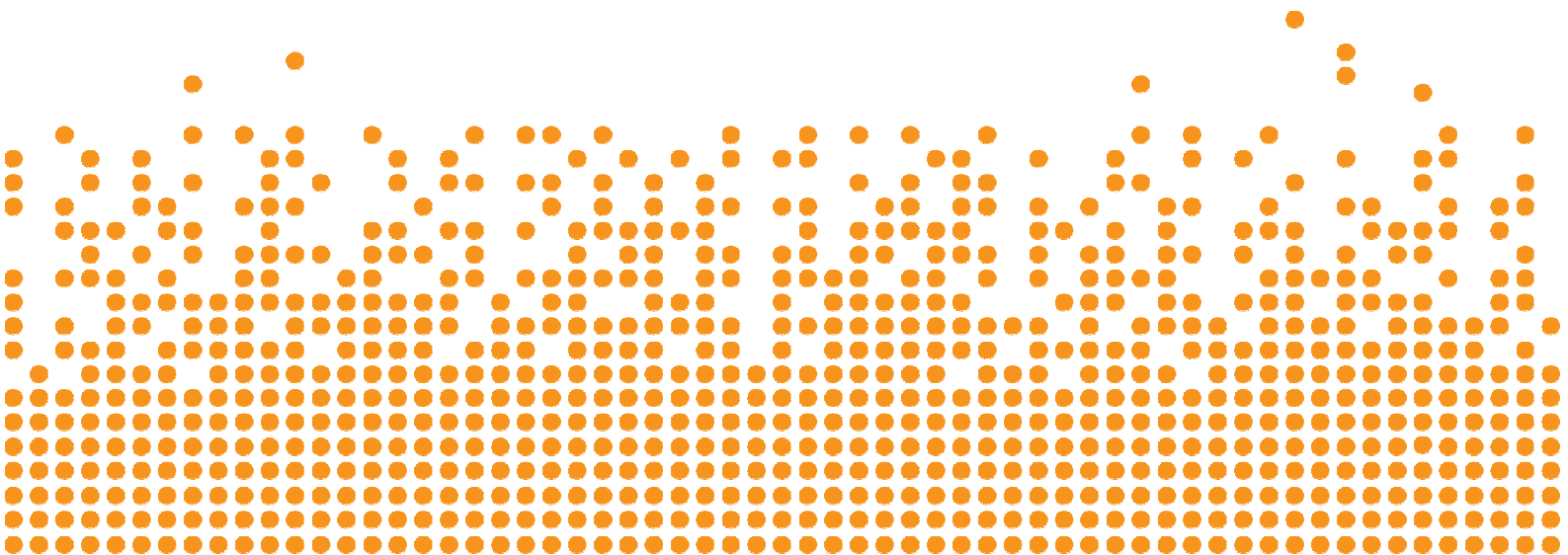




ریاضی ۳

● فصل ۳

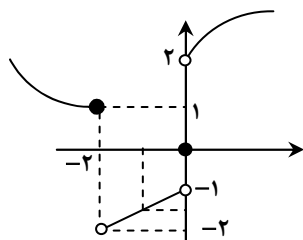
حد و پیوستگی



ریاضی ۳

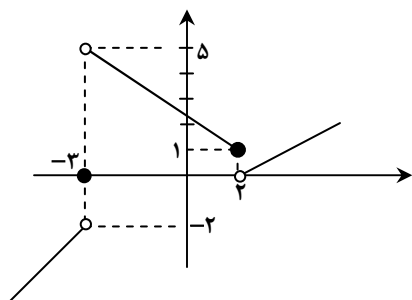
فصل ۳: حد و پیوستگی

۱- با توجه به نمودار تابع f ، حاصل $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} (f(x+1) + f(x-1))$ کدام است؟



- (۱) $-\frac{3}{2}$
(۲) -4
(۳) صفر
(۴) -2

۲- با توجه به نمودار تابع f ، حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(\frac{3}{1-x})$ کدام است؟



- (۱) صفر
(۲) ۱
(۳) -2
(۴) ۵

۳- تابع $f(x) = \begin{cases} ax - 2b & x < 2 \\ ax^2 - 2bx + 3 & x \geq 2 \end{cases}$ مفروض است. اگر حد راست این تابع در نقطه‌ی $x = 2$ از حد چپ آن ۳ واحد بیش‌تر باشد، کدام گزینه در مورد a و b درست است؟

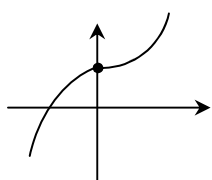
(۴) $a + b = 0$

(۳) $b - a = 3$

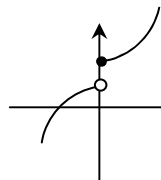
(۲) $a - b = 3$

(۱) $a = b$

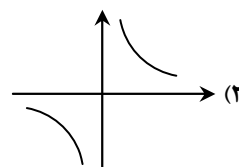
۴- کدام یک از توابع زیر در $x_0 = 0$ حد راست دارد ولی دارای حد نمی‌باشد؟



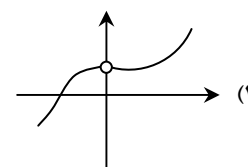
(۴)



(۳)



(۲)



(۱)

۵- حد چپ تابع $f(x) = \begin{cases} 2a \sin(x - \frac{\pi}{3}) + 1 & x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{5}{a} - 3 \cot x & x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$ در نقطه‌ی $x_0 = \frac{\pi}{2}$ ، پنج واحد از حد راست آن تابع در همین نقطه بیش‌تر است. a کدام می‌باشد؟

(۴) فقط ۱

(۳) فقط ۵

(۲) -5 یا ۱

(۱) -1 یا ۵

۶- اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{2f(x) + 1} = 3$ ، حد تابع $g(x) = \frac{2f(x) + 10}{f^2(x) - 7}$ در نقطه‌ی $x = 1$ کدام است؟

(۴) ۱

(۳) -1

(۲) ۲

(۱) -2

۷- اگر $f(x) = \begin{cases} 2x + x^2 & x < 1 \\ \sqrt{x-1} & x \geq 1 \end{cases}$ ، حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} (f \circ f)(x)$ کدام است؟

(۴) حد ندارد.

(۳) ۳

(۲) $\sqrt{2}$

(۱) صفر

۸- اگر حد تابع $f + g$ در نقطه‌ی $x = x_0$ ، دو برابر حد تابع $f - g$ در این نقطه باشد، حد تابع $\frac{f}{g}$ در نقطه‌ی $x = x_0$ کدام است؟

($\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$)

(۴) $\frac{1}{3}$

(۳) ۳

(۲) $\frac{1}{2}$

(۱) ۲

۹- اگر $f\left(\frac{x-5}{x+3}\right) = \sqrt{x+1}$ حاصل $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ کدام است؟

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) $\sqrt{2}$

(۴) ۲

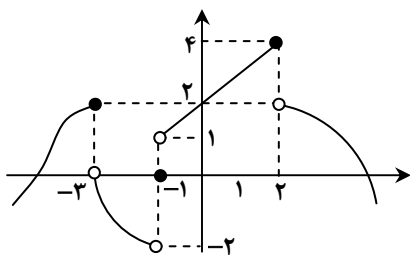
۱۰- اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، $\lim_{x \rightarrow (-3)^-} f(|x| - 4)$ کدام است؟

(۱) -۲

(۲) ۱

(۳) صفر

(۴) ۲



پاسخ‌های تشریحی فصل ۳

۱- گزینه ۲ پاسخ است.

۵	۴	۱
---	---	---

اگر رقم یکان عدد مزبور صفر باشد داریم:

اگر رقم یکان عدد مزبور ۲ یا ۴ باشد، داریم:

۲ یا ۴ به جز صفر

۴	۴	۲
---	---	---

$$S \text{ اعضای } = 5 \times 4 \times 1 + 4 \times 4 \times 2 = 20 + 32 = 52$$

نکته: اصل ضرب: اگر عملی با n_1 طریق مختلف، عمل دومی با n_2 طریق مختلف، عمل سومی با n_3 طریق مختلف و ... قابل انجام باشند، همه‌ی این اعمال باهم به $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \dots$ طریق مختلف قابل انجام هستند.

گزینه‌ی ۱: اگر به این نکته که صفر نمی‌تواند رقم سمت چپ عدد باشد، توجه نکنیم، به این گزینه می‌رسیم:

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow 5 \times 4 \times 3 = 60$$

گزینه‌ی ۳: اگر دو حالت «صفر بودن رقم یکان» و «۲ یا ۴ بودن رقم یکان» را تفکیک نکنیم، به این گزینه می‌رسیم:

۴، ۲، ۰ به جز صفر

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow 4 \times 4 \times 3 = 48$$

گزینه‌ی ۴: اگر به زوج بودن عدد توجه نکنیم، این گزینه را انتخاب خواهیم کرد:

به جز صفر

$$\begin{bmatrix} 5 & 5 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow 5 \times 5 \times 4 = 100$$

۲- گزینه ۱ پاسخ است.

این که بار سوم پرتاب کدام طرف سکه ظاهر می‌شود، مستقل از پرتاب‌های قبل و بعد آن می‌باشد. لذا:

$$A = \{\text{پشت}\} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{2}$$

$$S = \{\text{پشت، رو}\}$$

توجه کنید که در تست راجع به پرتاب‌های دیگر شرطی مطرح نشده است، لذا آن‌ها در محاسبه‌ی احتمال نقشی ندارند. اگر در سؤال مطرح می‌شد که: «احتمال این که فقط بار سوم پشت سکه ظاهر شود، چقدر است؟» آن وقت باید در نظر می‌گرفتیم که در چهار پرتاب دیگر باید

$$\text{طرف روی سکه ظاهر شود و احتمال این پیشامد برابر می‌شد با: } \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$$

نکته: پیشامدهای مستقل، پیشامدهایی هستند که رخداد یا عدم رخداد هریک تأثیری در رخداد بقیه نداشته باشد.

گزینه‌ی ۳: اگر اشتباهاً در نظر بگیریم که از این ۵ پرتاب در ۳ پرتاب پشت سکه ظاهر می‌شود، این گزینه انتخاب خواهد شد:

$$\left(\frac{5}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5!}{3! \times 2!} \times \frac{1}{2^5} = \frac{5}{16}$$

گزینه‌ی ۴: اگر اشتباهاً پشت آمدن بار سوم را به معنی پشت نیامدن سایر پرتاب‌ها در نظر بگیریم (یعنی خودمان یک لفظ «فقط» به تست

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$$

↓ ↓ ↓ ↓ ↓
رو پشت رو پشت رو

۳- گزینه ۳ پاسخ است.

متمم این پیشامد این است که هر سه دارای گروه خونی غیر AB باشند. یعنی:

$$P(A') = \left(\frac{3}{4}\right) \times \frac{90}{100} \times \frac{90}{100} \times \frac{90}{100} = \frac{729}{1000} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{729}{1000} = \frac{271}{1000} = 27.1\%$$

گزینه‌ی ۲: احتمال متمم پیشامد مطرح شده در تست است.

گزینه‌ی ۴: اگر احتمال خود پیشامد را بدون در نظر گرفتن تعداد هر حالت آن حساب کنیم (نمودار درختی) به این گزینه می‌رسیم.

$$\frac{10}{100} \times \frac{90}{100} \times \frac{90}{100} + \frac{10}{100} \times \frac{10}{100} \times \frac{90}{100} + \frac{10}{100} \times \frac{10}{100} \times \frac{10}{100} = 9.1\%$$

در حالی که باید این‌گونه حساب شود:

$$3 \times \frac{10}{100} \times \frac{90}{100} \times \frac{90}{100} + 3 \times \frac{10}{100} \times \frac{10}{100} \times \frac{90}{100} + 1 \times \frac{10}{100} \times \frac{10}{100} \times \frac{10}{100} = 27.1\%$$

۴- گزینه ۳ پاسخ است.

$$n(S) = 6 \times 6 = 36$$

مجموع دو تاس بیش‌تر از ۴

مجموع دو تاس کوچک‌تر یا مساوی ۴

$$A' = \{(1,1), (1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (2,2)\} \Rightarrow P(A') = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \quad P(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

توجه داریم که پیشامدهای «۲ بودن مجموع دو تاس» و «۳ بودن مجموع دو تاس» و «۴ بودن مجموع دو تاس» دوجه‌دو ناسازگارند، لذا

$$P(A') = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \text{ یعنی: با مجموع احتمال‌های آن‌ها.}$$

در پرتاب دو تاس مجموع اعداد روشده حداقل ۲ و حداکثر ۱۲ می‌باشد. تعداد اعضای پیشامد A که در آن مجموع دو تاس برابر m باشد، با فرمول زیر قابل محاسبه است:

$$n(A) = \begin{cases} m-1 & 2 \leq m \leq 7 \\ 13-m & 7 \leq m \leq 12 \end{cases}$$

$$\Rightarrow n(A') = (2-1) + (3-1) + (4-1) = 6 \Rightarrow P(A') = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

نکته: اگر A و B و C و ... پیشامدهای دوجه‌دو ناسازگار باشند (یعنی اشتراک دوجه‌دو آن‌ها تهی باشد)، داریم:

$$P(A \cup B \cup C \cup \dots) = P(A) + P(B) + P(C) + \dots$$

$$\frac{4-1}{6 \times 6} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \text{ این گزینه احتمال این است که مجموع دو تاس دقیقاً ۴ باشد:}$$

گزینه ۴: اگر متمم پیشامد A (مجموع دو تاس بیش‌تر از ۴) را اشتباهاً A' (مجموع دو تاس کم‌تر از ۴) بگیریم (یعنی مساوی با ۴ را لحاظ نکنیم)، به این گزینه می‌رسیم:

$$n(A') = (2-1) + (3-1) = 2$$

$$P(A') = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{1}{18} = \frac{17}{18}$$

۵- گزینه ۳ پاسخ است.

$$\begin{array}{l} \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} A \quad \frac{3}{7} \\ B \quad \frac{2}{7} \end{array} \right. \text{ قرمز} \end{array}$$

$$P = \frac{3}{14} + \frac{2}{14} = \frac{5}{14}$$

۶- گزینه ۴ پاسخ است.

حاصل ضرب سه عدد تنها در صورتی فرد است که هر سه فرد باشند:

$$P(A') = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{10}{120} = \frac{1}{12}$$

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$$

۷- گزینه ۴ پاسخ است.

علی و رضا را یک نفر در نظر می‌گیریم:

$$P(A) = \frac{1! \times 4!}{5!} = \frac{1}{5}$$

۸- گزینه ۴ پاسخ است.

A: موی قهوه‌ای

B: چشم قهوه‌ای

$$P(B \cap A') = P(B) - P(A \cap B) = 0.25 - 0.15 = 0.10 = \frac{1}{10}$$

۹- گزینه ۲ پاسخ است.

۵	سبز
۴	آبی
۲	زرد

۱۱ مهره

$$n(S) = \binom{11}{3} = \frac{11 \times 10 \times 9}{6} = 165$$

$P(A) = P$ (سه آبی یا دو آبی یا یک آبی) = P (حداقل یک مهره‌ی آبی)

$$= \frac{\binom{4}{1}\binom{7}{2} + \binom{4}{2}\binom{7}{1} + \binom{4}{3}}{165} = \frac{130}{165} = \frac{26}{33}$$

$$P(B) = P \text{ (هر سه سبز)} = \frac{\binom{5}{3}}{165} = \frac{10}{165} = \frac{2}{33} \rightarrow \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{26}{33}}{\frac{2}{33}} = 13$$

۱۰- گزینه ۲ پاسخ است.

$$\left. \begin{array}{l} |S| = m + n + k = 3n + n + 4n = 8n \\ |A| = n \text{ پیشامد قرمز بودن} \end{array} \right\} \Rightarrow P(A) = \frac{n}{8n} = \frac{1}{8}, \text{ احتمال قرمز نبودن} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$